CHATIRON Thibault

SRT5

Automne 2014

TP_projet :

Optimisation

Mise en œuvre d'une méthode de descente

MT12

Introduction :

L'objectif de ce mini-projet est dans un premier temps de programmer une méthode de descente sous Matlab. Dans un second temps, on cherchera à analyser les performances de l'algorithme sur des exemples de fonctions de R^2 dans R. Les problèmes qui peuvent se poser dans le « réglage » des différents paramètres seront étudiés.

1) Programmation

Code script.m

```
clc
clear
close all

%%

%on ne se servira ici que 2 et 3 pour analytique et numérique
fprintf(' ->1<- \t Calcul de f seul \n ->2<- \t Calcul de f et gradf
analytique \n ->3<- \t Calcul de f et gradf numerique \n');
mode_grad = input('Choix de l algorithme :\n ');

%on étudiera deux fonctions
fprintf(' ->1<- \t f1=x1^2-x1^3-x1*x2^2 \n ->2<- \t f2=(x2-x1^2)^2+(1-
x1)^2 \n');
fct = input('Choix de la fonction :\n ');

%% Parametres

x0=[2;3]; %point de départ autour de [0.2;0.02] pour f1 et [2;3] pour f2
Nmax=800; %nombre qui devra être assez grand, >200
epsilon=10^-8; %nous cherchons à être précis
delta=0.5; %<=1 choisi en changeant la position de x0 par rapport au mode
analytique
pas=0.05; %choisi en comparant la fonction gradpf1 et gradpf2 pour chaque
mode / 0.2 => nombre iteration atteint pour gradpf1

%% Gradient à pas fixe
gradpf1(x0, pas, Nmax, epsilon, mode_grad, delta, fct);

%% Gradient à pas variable

alpha = 2; %voir son influence dans le rapport
gradpf2(x0, pas, Nmax, epsilon, mode_grad, delta, alpha, fct);
```

Code gradpf1.m

```
function [ fopt, xopt, n ] = gradpf1(x0, pas, Nmax, epsilon, mode_grad,
delta, fct)

k=0;
xold=x0;

    tk=pas;
    [f,gradf]=evalfetgrad(xold,mode_grad,delta,fct); %fonction f et calcul
gradient
    dk=-gradf;
    xnew=xold+tk*dk;
    k=k+1;

while abs(lafonction(xold,fct) - lafonction(xnew,fct))>epsilon && k<=Nmax
%test d'arret
```

```
    xold=xnew;
    tk=pas;
    [f,gradf]=evalfetgrad(xold,mode_grad,delta,fct);
    dk=-gradf;
    xnew=xold+tk*dk;
    k=k+1;
end

if k >= Nmax
    fprintf('pas fixe : Nombre maximum d''iterations atteint \n ');
else
    fopt=lafonction(xnew,fct);
    xopt=xnew;
    n=k;
    fprintf('Pas fixe : Convergence - le minimum est obtenu pour x=[%g ,
%g], la valeur correspondante de f est %d, et le nombre d''iteration est
%d \n',xnew(1),xnew(2),fopt,n);
end

% affichage 3D avec fopt au point xopt
if fct==2 %fonction 2
 figure(4);
 [x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2, -2:.1:2);
 f2=x2.^2-2*x2.*x1.^2+x1.^4 + 1-2.*x1+x1.^2;
 meshc(x1,x2,f2); % <-- plot f
 xlabel('x_1')
 ylabel('x_2')
 zlabel('f2')
 title('Fonction2 - pas fixe');
 hold on;
 plot3(xopt(1),xopt(2),fopt,'sk','markerfacecolor',[0,0,0]); % <-- plot
point xopt, fopt(xopt)
 hold off;

elseif fct==1 %fonction 1
 figure(4);
 [x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2, -2:.1:2);
 f1=x1.^2-x1.^3-x1.*x2.^2;
 meshc(x1,x2,f1); % <-- plot f
 xlabel('x_1')
 ylabel('x_2')
 zlabel('f1')
 title('Fonction1 - pas fixe');
 hold on;
 plot3(0,0,(0)^2-(0)^3-(0)*(0)^2,'sk','markerfacecolor',[0,0,0]); % <--
plot point xopt, f(xopt)
 hold off;
end

end
```

Code gradpf2.m

```
function [ fopt, xopt, n ] = gradpf2(x0, pas, Nmax, epsilon, mode_grad,
delta, alpha, fct)

k=0;
```

```
xold=x0;

    tk=pas;
    [f,gradf]=evalfetgrad(xold,mode_grad,delta,fct);
    dk=-gradf;
    xnew=xold+tk*dk;
    k=k+1;

while abs(lafonction(xold,fct) - lafonction(xnew,fct))>epsilon && k<=Nmax
%test d'arret

    if lafonction(xnew,fct)>lafonction(xold,fct)
        t(k)=pas/alpha;
    else
        t(k)=pas;
    end

    xold=xnew;
    [f,gradf]=evalfetgrad(xold,mode_grad,delta,fct);
    dk=-gradf;
    xnew=xold+t(k)*dk;
    k=k+1;
end

if k >= Nmax
    fprintf('Pas variable : Nombre maximum d''iterations atteint \n ');
else
    fopt=lafonction(xnew,fct);
    xopt=xnew;
    n=k;
    fprintf('Pas variable : Convergence - le minimum est obtenu pour x=[%g
, %g], la valeur correspondante de f est %d, et le nombre d''iteration est
%d \n',xnew(1),xnew(2),fopt,n);
end

figure(3);
plot(t)
grid on;
xlabel('k');
ylabel('tk');
title('Evolution du pas à chaque itération');

% affichage 3D avec fopt au point xopt
if fct==2 %fonction2
 figure(5);
 [x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2, -2:.1:2);
 f2=x2.^2-2*x2.*x1.^2+x1.^4 + 1-2.*x1+x1.^2;
 meshc(x1,x2,f2); % <-- plot f
 xlabel('x_1')
 ylabel('x_2')
 zlabel('f2')
 title('Fonction2 - pas variable');
 hold on;
 plot3(xopt(1),xopt(2),fopt,'sk','markerfacecolor',[0,0,0]); % <-- plot
point x1= 1, x2 = 1, f(x1,x2)
 hold off;

elseif fct==1 %fonction1
 figure(5);
```

```
 [x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2, -2:.1:2);
 f1=x1.^2-x1.^3-x1.*x2.^2;
 meshc(x1,x2,f1); % <-- plot f
 xlabel('x_1')
 ylabel('x_2')
 zlabel('f1')
 title('Fonction1 - pas variable');
 hold on;
 plot3(0,0,(0)^2-(0)^3-(0)*(0)^2,'sk','markerfacecolor',[0,0,0]); % <--
plot point x1= 0, x2 = 0, f(x1,x2)
 hold off;
end

end
```

Code evalfetgrad.m

```
function [ f,gradf ] = evalfetgrad(x,mod_grad,delta,fct)
%le parametre de sortie est la valeur de f(x)
% où x est le vecteur d'entrée
%mod_grad = 1 calcul de f seul
%mod_grad = 2 calcul de f et gradf analytique
%mod_grad = 3 calcul de f et gradf numérique

x=x(:);
n=size(x,1);
f=lafonction(x,fct);

if mod_grad == 2 %calcul analytique du gradient
    if fct==1
        gradf=[2*x(1)-3*x(1)^2-x(2)^2;-2*x(1)*x(2)]; %f1
    elseif fct==2
        gradf=[-4*x(2)*x(1)+4*x(1)^3+2*x(1)-2;2*x(2)-2*x(1)^2]; %f2
    end
elseif mod_grad == 3 %calcul numérique
    for i=1:n
        xdec=x;
        xdec(i,1)=x(i,1)+delta;
        gradf(i,:)=(lafonction(xdec,fct)-f)/delta;
    end
end

end
```

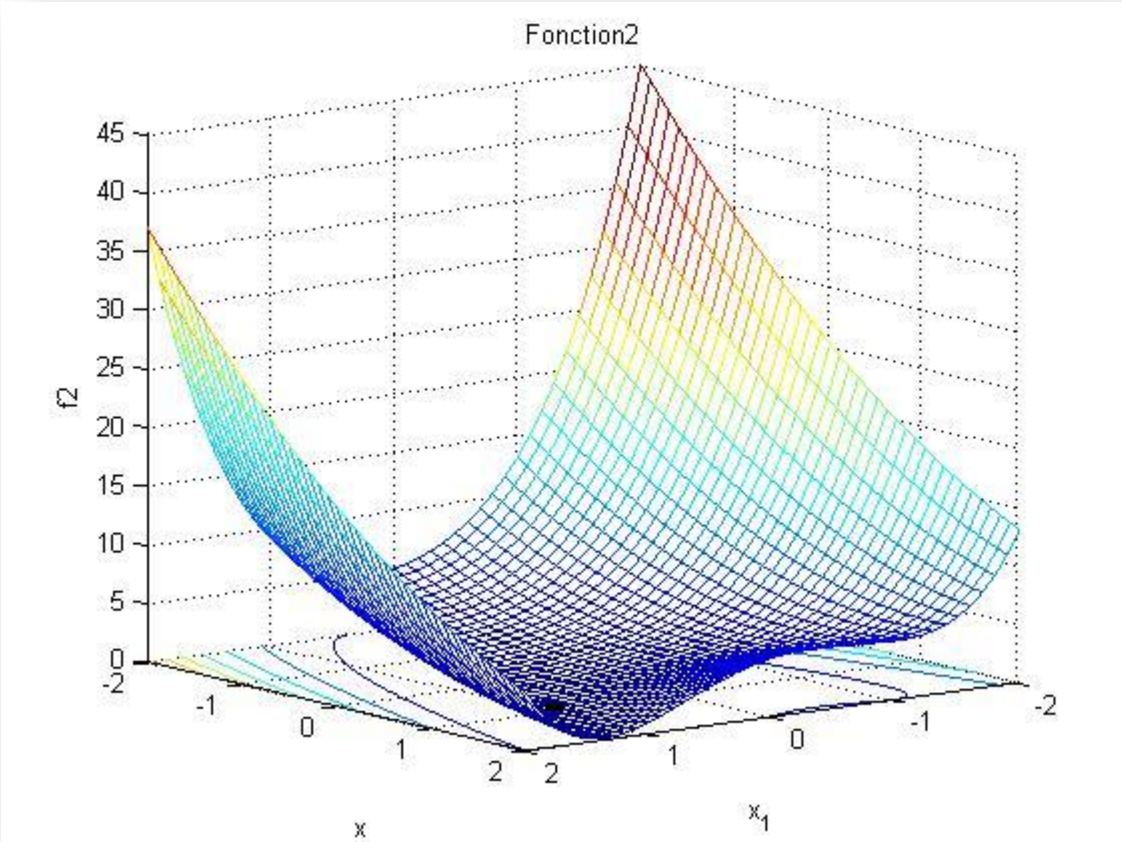
Code lafonction.m

```
function [ f ] = lafonction(x,fct)
%détermination des fonctions f1 et f2

if fct==1
    f=x(1)^2-x(1)^3-x(1)*x(2)^2; %f1
elseif fct==2
    f=x(2)^2-2*x(2)*x(1)^2+x(1)^4 + 1-2*x(1)+x(1)^2; %f2
end

end
```

2) Etude de la fonction $\mathrm{f}(\mathrm{x1}, \mathrm{x2}) = (x2 - x1^2)^2 + (1 - x1)^2$



Code

```
figure(1);
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2, -2:.1:2);
f2=x2.^2-2*x2.*x1.^2+x1.^4 + 1-2.*x1+x1.^2;
meshc(x1,x2,f2); % <-- plot f
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
zlabel('f2')
title('Fonction2');
hold on;
plot3(1,1,(1)^2-2*(1)*(1)^2+(1)^4 + 1-
2*(1)+(1).^2,'sk','markerfacecolor',[0,0,0]); % <-- plot point x1= 1, x2 =
1, f(x1,x2)
 hold off;
```

2.1) Mode analytique

2.1.1) Influence du point de départ x0

2.1.1.1) Gradient à pas fixe

```
Nmax=500; %nombre qui devra être assez grand, >200
epsilon=10^-8; %nous cherchons à être précis
delta=0.5; %<=1 choisi en changeant la position de x0 par rapport au mode
analytique
pas=0.1; %choisi en comparant la fonction gradpf1 et gradpf2 pour chaque
mode
alpha=2;
```

Résultat pour `x0=[2;2]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00081], la valeur correspondante de f est 1.319864e-07, et le nombre d'iteration est 194

Résultat pour `x0=[2;3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00081], la valeur correspondante de f est 1.327785e-07, et le nombre d'iteration est 234

Résultat pour `x0=[-2;1]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00081], la valeur correspondante de f est 1.316346e-07, et le nombre d'iteration est 192

Résultat pour `x0=[5;3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[Inf , 3.21727e+226], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 6 %NaN car -Inf

On remarque donc que le point de départ x0 a une influence sur le résultat final. Il peut permettre de trouver l' « emplacement exact » d'un minimum local. On trouve une valeur de f sensiblement identique pour chaque valeur de x0. On peut également voir que le point de départ influence le nombre d'itérations. Il faudra donc choisir Nmax grand, on prendra ici Nmax>200.

2.1.1.2) Gradient à pas variable

Résultat pour `x0=[2;2]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00083], la valeur correspondante de f est 1.368530e-07, et le nombre d'iteration est 196

Résultat pour `x0=[2;3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00082], la valeur correspondante de f est 1.339520e-07, et le nombre d'iteration est 249

Résultat pour `x0=[-2;1]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00081], la valeur correspondante de f

est 1.316346e-07, et le nombre d'iteration est 192

Résultat pour `x0=[5;3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[8.53523e+303 , 1.22121e+202], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 6 %NaN car -Inf

On remarque donc que le point de départ x0 a une influence sur le résultat final. Il peut permettre de trouver l' « emplacement exact » d'un minimum local. On trouve une valeur de f sensiblement identique pour chaque valeur de x0. On peut également voir que le point de départ influence le nombre d'itérations. Il faudra donc choisir Nmax grand, on prendra ici Nmax=500.

2.1.1.3) Pas fixe – Pas variable

Pour des valeurs x0 identiques, on peut noter une sensible différence dans les coordonnées du minimum ainsi que dans la valeur de f. Le nombre d'itérations est quasiment le même quel que soit le mode du gradient. Cette faible différence s'explique sur le fait qu'epsilon est fixé à 10^-8. On cherche ainsi à être précis.

2.1.2) Influence du type de test d'arrêt et de la valeur du paramètre epsilon

On a d'ores et déjà vu que x0 avait une influence sur le nombre d'itérations. Il faudra donc choisir un Nmax grand si l'on souhaite obtenir une convergence, sinon :

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-8
Nombre maximum d'iterations atteint

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-5
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.0109 , 1.0264], la valeur correspondante de f est 1.388817e-04, et le nombre d'iteration est 134 %gradient à pas fixe
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.01095 , 1.02651], la valeur correspondante de f est 1.400904e-04, et le nombre d'iteration est 149 %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-3
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.11985 , 1.29969], la valeur correspondante de f est 1.644606e-02, et le nombre d'iteration est 61 %gradient à pas fixe
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.50875 , 2.60211], la valeur correspondante de f est 3.649591e-01, et le nombre d'iteration est 12 %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.26994 , 2.12748], la valeur correspondante de f est 3.378253e-01, et le nombre d'iteration est 15 %gradient à pas fixe

Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.66507 , 2.72269], la valeur correspondante de f est 4.447966e-01, et le nombre d'iteration est 7 %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=500 pour epsilon=10^-8
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00081], la valeur correspondante de f est 1.327785e-07, et le nombre d'iteration est 234 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00082], la valeur correspondante de f est 1.339520e-07, et le nombre d'iteration est 249** %gradient à pas variable

2.1.2.1) Gradient à pas fixe – pas variable

A Nmax fixé, on remarque qu'epsilon a une influence sur le résultat final ainsi que sur le nombre d'itérations. Il faudra donc choisir un epsilon < 10^-5. Choisir un epsilon très petit aura une influence sur le fait de trouver ou non une convergence. Ainsi, on augmentera Nmax lorsque epsilon sera plus « précis ».

2.1.3) Influence du paramètre alpha

Alpha n'agit que dans le gradient à pas variable. Etudions l'influence d'alpha sur le résultat final.

Résultat pour alpha=2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00082], la valeur correspondante de f est 1.339520e-07, et le nombre d'iteration est 249

Résultat pour alpha=3
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00033 , 1.0008], la valeur correspondante de f est 1.292510e-07, et le nombre d'iteration est 244

Résultat pour alpha=5
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00033 , 1.0008], la valeur correspondante de f est 1.301314e-07, et le nombre d'iteration est 243

Résultat pour alpha=100
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00081], la valeur correspondante de f est 1.332160e-07, et le nombre d'iteration est 242

On peut remarquer qu'alpha n'a pas vraiment d'influence lors du calcul du gradient en mode analytique.

2.1.4) Influence du pas

2.1.4.1) Gradient à pas fixe

Résultat pour pas=0.1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00081], la valeur correspondante de f est 1.327785e-07, et le nombre d'iteration est 234

Résultat pour pas=0.2
Nombre maximum d'iterations atteint

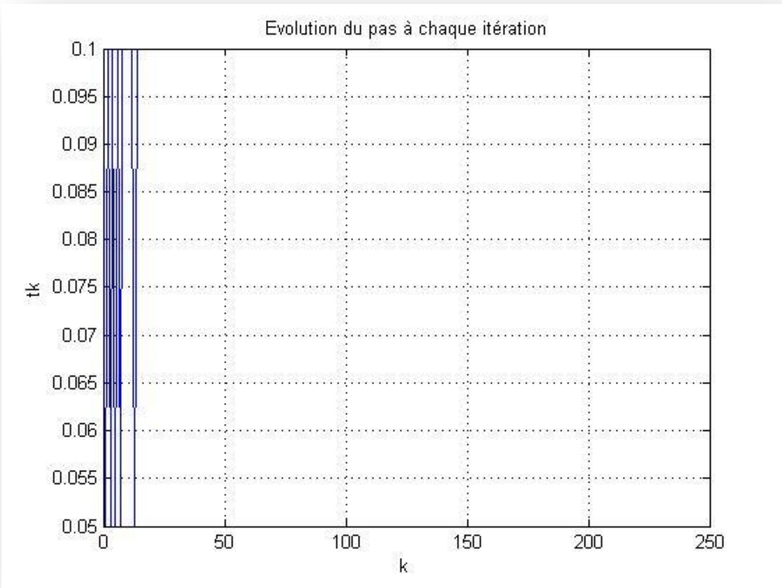
Résultat pour pas=1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[4.2072e+289 , 9.60105e+192], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 6

Résultat pour pas=0.05
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00049 , 1.00119], la valeur correspondante de f est 2.825914e-07, et le nombre d'iteration est 482

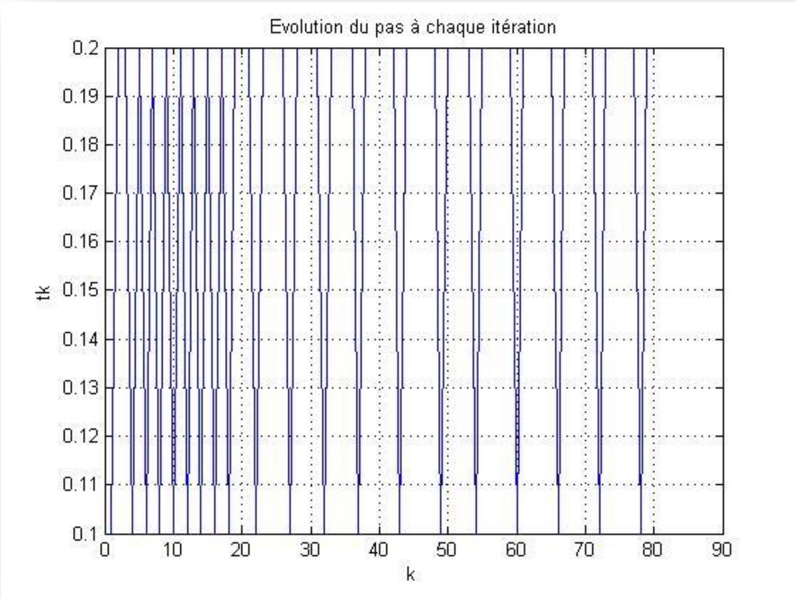
On remarque que le pas a une grande influence sur le nombre d'itérations.

2.1.4.2) Gradient à pas variable

Résultat pour pas=0.1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00082], la valeur correspondante de f est 1.339520e-07, et le nombre d'iteration est 249



Résultat pour pas=0.2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00034 , 1.00111], la valeur correspondante de f est 2.943109e-07, et le nombre d'iteration est 83



Résultat pour pas=1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.12289e+253 , 3.15891e+168], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 6

Résultat pour pas=0.05
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.00049 , 1.00119], la valeur correspondante de f est 2.825914e-07, et le nombre d'iteration est 482

Le pas a une influence sur le nombre d'itération.

2.1.4.3) Pas fixe – pas variable

Le résultat change un peu mais c'est surtout sur le nombre d'itérations que le pas a une influence

2.2) Mode numérique

2.2.1) Influence du point de départ x0

2.2.1.1) Gradient à pas fixe

Résultat pour `x0=[2;2]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 109

Résultat pour `x0=[2;3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.250000e-01, et le nombre d'iteration est 112

Résultat pour `x0=[-2;1]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 106

Résultat pour `x0=[5;3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.0821e+40 , 3.55954e+08], la valeur correspondante de f est 1.371091e+160, et le nombre d'iteration est 5

On remarque donc que le point de départ x0 n’a pas vraiment d’influence ni sur le résultat final ni sur le nombre d’itérations pour les trois premières valeurs de x0. Il peut permettre de trouver l’ « emplacement exact » d’un minimum local. On trouve une valeur de f sensiblement identique pour chaque valeur de x0.

2.2.1.2) Gradient à pas variable

Résultat pour `x0=[2;2]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 200

Résultat pour `x0=[2;3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 212

Résultat pour `x0=[-2;1]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 206

Résultat pour `x0=[5;3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.3095e+36 , 4.43941e+07], la valeur correspondante de f est 2.940481e+144, et le nombre d'iteration est 5

On remarque donc que le point de départ x0 n’a pas vraiment d’influence ni sur le résultat final ni sur le nombre d’itérations pour les trois premières valeurs de x0. Il peut permettre de trouver l’ « emplacement exact » d’un minimum local. On trouve une valeur de f sensiblement identique pour chaque valeur de x0.

2.2.1.3) Pas fixe – Pas variable

On remarque que choisir entre le gradient à pas fixe et le gradient à pas variable à x0 fixé, a une influence sur le nombre d’itérations. En effet, il faut noter qu’il faut compter 100 itérations de plus pour le gradient à pas variable. Cependant, quel que soit le type de pas choisi, le minimum et la valeur correspondante de f sont les même (excepté pour x0=[5 ;3]).

2.2.2) Influence du type de test d'arrêt et de la valeur du paramètre epsilon

On a d'ores et déjà vu que x0 avait une influence sur le nombre d'itérations. Il faudra donc choisir un Nmax grand si l'on souhaite obtenir une convergence, sinon :

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-8
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.250000e-01, et le nombre d'iteration est 112 %gradient à pas fixe **Nombre maximum d'iterations atteint** %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-5
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25002 , -0.187455], la valeur correspondante de f est 6.249521e-01, et le nombre d'iteration est 71 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.250047 , -0.187396], la valeur correspondante de f est 6.248896e-01, et le nombre d'iteration est 127** %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-3
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.661116 , 0.719416], la valeur correspondante de f est 1.945594e-01, et le nombre d'iteration est 10 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.255032 , -0.176337], la valeur correspondante de f est 6.132411e-01, et le nombre d'iteration est 69** %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.811904 , 1.10079], la valeur correspondante de f est 2.303885e-01, et le nombre d'iteration est 7 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.769681 , 0.988878], la valeur correspondante de f est 2.102353e-01, et le nombre d'iteration est 9** %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=500 pour epsilon=10^-8
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.250000e-01, et le nombre d'iteration est 112 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 212** %gradient à pas variable

2.2.2.1) Gradient à pas fixe – pas variable

A Nmax fixé, on remarque qu'epsilon a une influence sur le résultat final ainsi que sur le nombre d'itérations. Il faudra donc choisir un epsilon < 10^-5. Choisir un epsilon très petit aura une influence sur le fait de trouver ou non une convergence. Ainsi, on augmentera Nmax lorsque epsilon sera plus « précis ».

2.2.3) Influence du paramètre alpha

Alpha n'agit que dans le gradient à pas variable. Etudions l'influence d'alpha sur le résultat final.

Résultat pour alpha=2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 212

Résultat pour alpha=3
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249998e-01, et le nombre d'iteration est 309

Résultat pour alpha=5
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249997e-01, et le nombre d'iteration est 496

Résultat pour alpha=100
Nombre maximum d'iterations atteint

Alpha influence le nombre d'itérations lors du calcul du gradient en mode numérique.

2.2.4) Influence du pas

2.2.4.1) Gradient à pas fixe

Résultat pour pas=0.1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.250000e-01, et le nombre d'iteration est 112

Résultat pour pas=0.2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[2.31856e+33 , 1.26666e+07], la valeur correspondante de f est 2.889860e+133, et le nombre d'iteration est 8

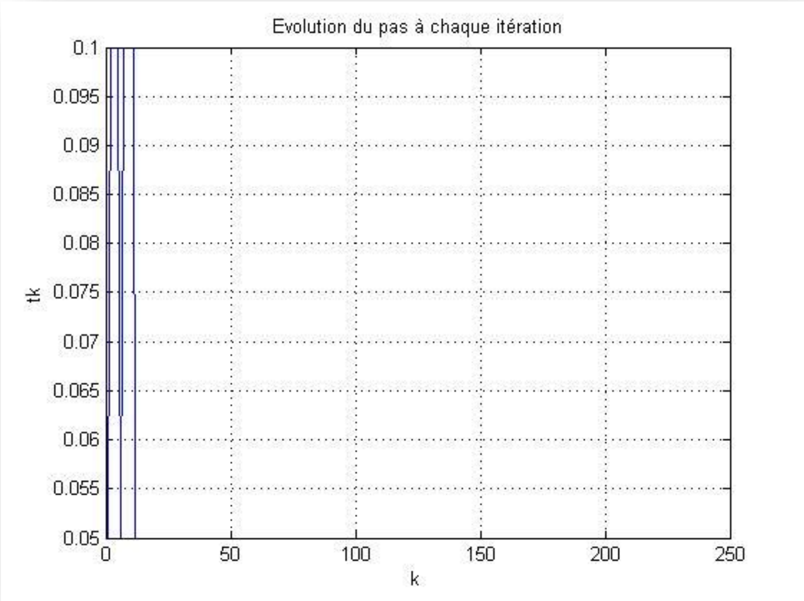
Résultat pour pas=1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[3.46271e+42 , 1.65542e+09], la valeur correspondante de f est 1.437693e+170, et le nombre d'iteration est 5

Résultat pour pas=0.05
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 228

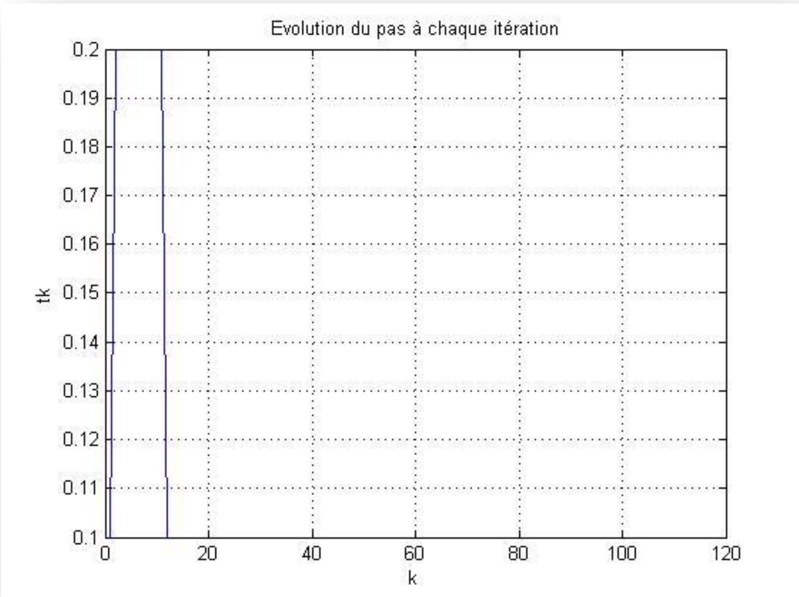
On remarque que le pas a une grande influence sur le nombre d'itérations.

2.2.4.2) Gradient à pas variable

Résultat pour pas=0.1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 212



Résultat pour pas=0.2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 103



Résultat pour pas=1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[4.19538e+38 , 2.06646e+08], la valeur correspondante de f est 3.098015e+154, et le nombre d'iteration est 5

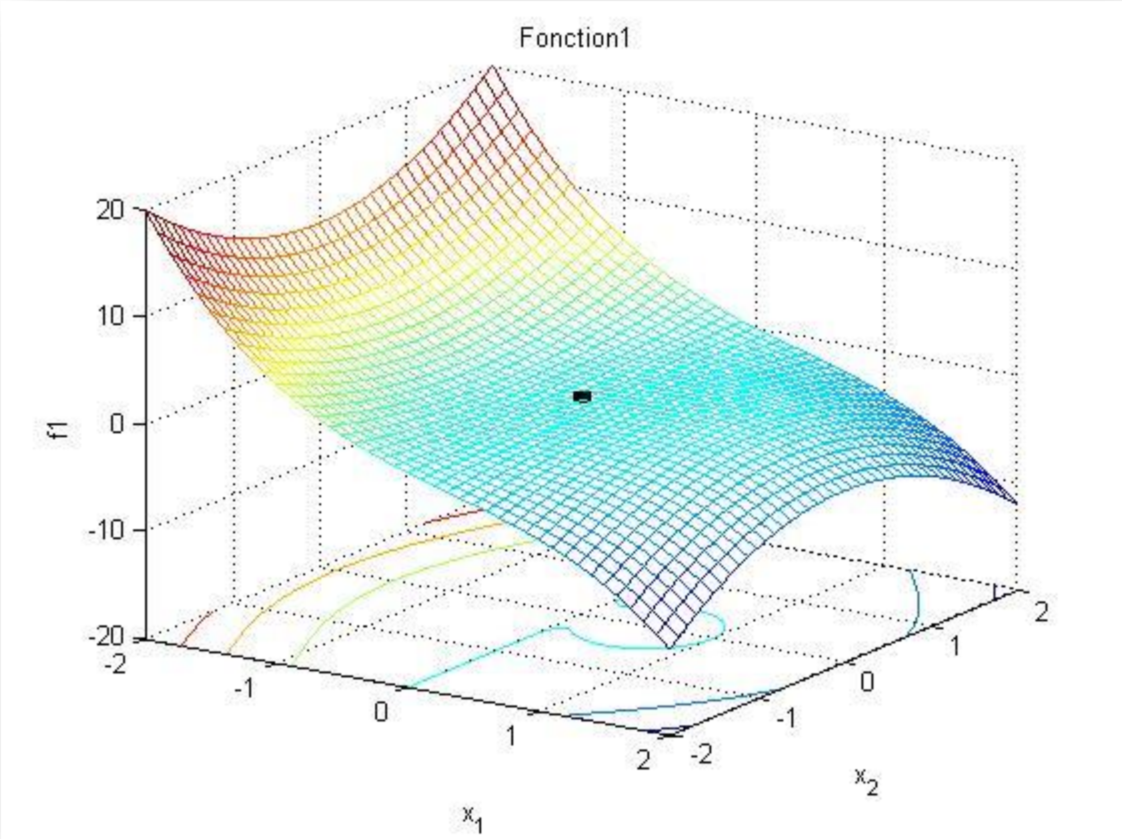
Résultat pour pas=0.05
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249998e-01, et le nombre d'iteration est 419

Le pas a une influence sur le nombre d'itération.

2.2.4.3) Pas fixe – pas variable

Le résultat change un peu mais c'est surtout sur le nombre d'itérations que le pas a une influence

3) Etude de la fonction $f(x1, x2) = x1^2 - x1^3 + x1 * x2^2$



Code

```
figure(2);
[x1,x2]=meshgrid(-2:.1:2, -2:.1:2);
f1=x1.^2-x1.^3-x1.*x2.^2;
meshc(x1,x2,f1); % <-- plot f
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
zlabel('f1')
title('Fonction1');
hold on;
plot3(0,0,( (0)^2-(0)^3-(0)*(0)^2,'sk','markerfacecolor',[0,0,0]); % <--
plot point x1= 0, x2 = 0, f(x1,x2)
hold off;
```

3.1) Mode analytique

3.1.1) Influence du point de départ x0

3.1.1.1) Gradient à pas fixe

```
Nmax=500; %nombre qui devra être assez grand, >200
epsilon=10^-8; %nous cherchons à être précis
delta=0.5; %<=1 choisi en changeant la position de x0 par rapport au mode
analytique
pas=0.1; %choisi en comparant la fonction gradpf1 et gradpf2 pour chaque
mode
alpha=2;
```

Résultat pour `x0=[0.2;0.02]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000450319 , 0.025447], la valeur correspondante de f est -8.890759e-08, et le nombre d'iteration est 35

Résultat pour `x0=[0.2;0.03]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000858455 , 0.0382605], la valeur correspondante de f est -5.203537e-07, et le nombre d'iteration est 35

Résultat pour `x0=[-0.2;0.01]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-7.87375e-05 , 0.00840617], la valeur correspondante de f est 1.176396e-08, et le nombre d'iteration est 32

Résultat pour `x0=[0.5;0.3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[5.59913e+204 , 1.21715e+203], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 30 %NaN car -Inf

On remarque donc que le point de départ x0 a une « influence » sur le résultat final. Il peut permettre de trouver l' « emplacement exact » d'un minimum local. On trouve une valeur de f sensiblement identique pour chaque valeur de x0 sauf pour la dernière valeur de x0. Il y a donc une certaine importance dans le choix de x0.

3.1.1.2) Gradient à pas variable

Résultat pour `x0=[0.2;0.02]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000450319 , 0.025447], la valeur correspondante de f est -8.890759e-08, et le nombre d'iteration est 35

Résultat pour `x0=[0.2;0.03]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000858455 , 0.0382605], la valeur correspondante de f est -5.203537e-07, et le nombre d'iteration est 35

Résultat pour `x0=[-0.2;0.01]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-7.87375e-05 , 0.00840617], la valeur

correspondante de f est 1.176396e-08, et le nombre d'iteration est 32

Résultat pour x0=[0.5;0.3]
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[5.59913e+204 , 1.21715e+203], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 30 %NaN car -Inf

On remarque donc que le point de départ x0 a une influence sur le résultat final. Il peut permettre de trouver l' « emplacement exact » d'un minimum local. On trouve une valeur de f sensiblement identique pour chaque valeur de x0 sauf pour la dernière valeur de x0. Il y a donc une certaine importance dans le choix de x0.

3.1.1.3) Pas fixe – Pas variable

Pour des valeurs x0 identiques, on peut noter que les coordonnées du minimum ainsi que la valeur de f sont les mêmes. Le nombre d'itérations est le même quel que soit le mode du gradient. Cela s'explique sur le fait qu'epsilon est fixé à 10^-8. On cherche ainsi à être précis.

3.1.2) Influence du type de test d'arrêt et de la valeur du paramètre epsilon

On prendra pas=1 pour voir les différentes influences de Nmax et epsilon. Il faut choisir un Nmax assez grand si l'on souhaite obtenir une convergence, sinon :

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-8
Nombre maximum d'iterations atteint %gradient à pas fixe
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.95489e-05 , 0.0263559], la valeur correspondante de f est -1.319715e-08, et le nombre d'iteration est 7 %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-5
Nombre maximum d'iterations atteint %gradient à pas fixe
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.95489e-05 , 0.0263559], la valeur correspondante de f est -1.319715e-08, et le nombre d'iteration est 7 %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-3
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.0749181 , 0.0248712], la valeur correspondante de f est 5.145886e-03, et le nombre d'iteration est 6 %gradient à pas fixe
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.0137419 , 0.0266637], la valeur correspondante de f est 2.012050e-04, et le nombre d'iteration est 4 %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.0993925 , 0.0235424], la valeur correspondante de f est 8.841892e-03, et le nombre d'iteration est 2 %gradient à pas fixe

Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.0993925 , 0.0235424], la valeur correspondante de f est 8.841892e-03, et le nombre d'iteration est 2 %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=500 pour epsilon=10^-8
Nombre maximum d'iterations atteint %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.95489e-05 , 0.0263559], la valeur correspondante de f est -1.319715e-08, et le nombre d'iteration est 7 %gradient à pas variable**

3.1.2.1) Gradient à pas fixe – pas variable

A Nmax fixé, on remarque qu'epsilon a une petite influence sur le résultat final ainsi que sur le nombre d'itérations. Il faudra donc choisir un epsilon < 10^-5. Choisir un epsilon très petit aura une influence sur le fait de trouver ou non une convergence. Ainsi, on augmentera Nmax lorsque epsilon sera plus « précis ».
Notons que si le pas était plus petit (ex :0.2), à Nmax fixé, on remarquera que pour tout epsilon, le résultat final ainsi que le nombre d'itérations est le même.

3.1.3) Influence du paramètre alpha

Alpha n'agit que dans le gradient à pas variable. Etudions l'influence d'alpha sur le résultat final. On prendra un pas=1.

Résultat pour alpha=2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.95489e-05 , 0.0263559], la valeur correspondante de f est -1.319715e-08, et le nombre d'iteration est 7

Résultat pour alpha=3
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.000257922 , 0.0265491], la valeur correspondante de f est 2.483384e-07, et le nombre d'iteration est 16

Résultat pour alpha=5
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.000763958 , 0.0269014], la valeur correspondante de f est 1.136943e-06, et le nombre d'iteration est 28

Résultat pour alpha=100
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.00255629 , 0.0390319], la valeur correspondante de f est 2.623449e-06, et le nombre d'iteration est 398

On peut remarquer qu'alpha a une influence sur le nombre d'itérations lors du calcul du gradient en mode analytique. Le résultat final n'est pas toujours le même mais sensiblement égal à 0.

3.1.4) Influence du pas

3.1.4.1) Gradient à pas fixe

Résultat pour pas=1
Nombre maximum d'iterations atteint

Résultat pour pas=2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[4.75939e+248 , -2.57406e+245], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 10 %Nan car -Inf

Résultat pour pas=0.8
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000282897 , 0.0259685], la valeur correspondante de f est -1.107676e-07, et le nombre d'iteration est 13

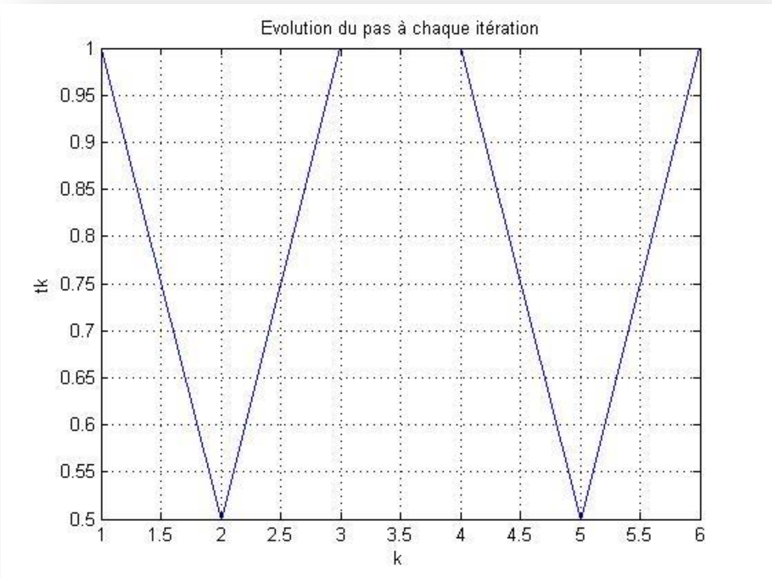
Résultat pour pas=1.2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[3.85399e+171 , 1.66295e+170], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 59 %Nan car -Inf

Résultat pour pas=0.05
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000509562 , 0.0254283], la valeur correspondante de f est -6.996052e-08, et le nombre d'iteration est 70

On remarque que le pas a une influence sur le nombre d'itérations. De plus si l'on souhaite avoir un résultat final significatif, il faudra ajuster la valeur de ce pas.

3.1.4.2) Gradient à pas variable

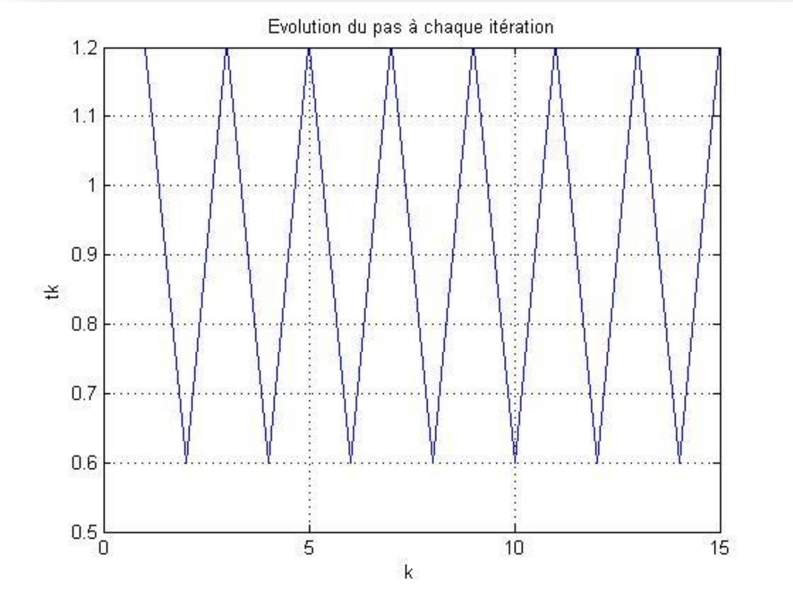
Résultat pour pas=1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.95489e-05 , 0.0263559], la valeur correspondante de f est -1.319715e-08, et le nombre d'iteration est 7



Résultat pour pas=2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.62841e+173 , 6.27354e+170], la valeur correspondante de f est NaN, et le nombre d'iteration est 11 %Nan car -Inf

Résultat pour pas=0.8
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000282897 , 0.0259685], la valeur correspondante de f est -1.107676e-07, et le nombre d'iteration est 13

Résultat pour pas=1.2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000322217 , 0.0285836], la valeur correspondante de f est -1.594672e-07, et le nombre d'iteration est 16



Résultat pour pas=0.05
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.000509562 , 0.0254283], la valeur correspondante de f est -6.996052e-08, et le nombre d'iteration est 70

Le pas a une influence sur le nombre d'itérations.

3.1.4.3) Pas fixe – pas variable

Le résultat final est le même quel que soit le type de pas choisi. Cependant, on note que l'on trouve plus de résultats pour le pas variable.

3.2) Mode numérique

3.2.1) Influence du point de départ x0

3.2.1.1) Gradient à pas fixe

Résultat pour `x0=[0.2;0.02]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 330

Résultat pour `x0=[0.2;0.03]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 331

Résultat pour `x0=[-0.2;0.01]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 310

Résultat pour `x0=[0.5;0.3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.52118e+30 , 5.0706e+29], la valeur correspondante de f est -3.911109e+90, et le nombre d'iteration est 17

On remarque donc que le point de départ x0 n'a pas vraiment d'influence ni sur le nombre d'itérations ni sur la valeur de x pour les trois premières valeurs de x0. Il peut permettre de trouver l' « emplacement exact » d'un minimum local. On trouve une valeur de f identique pour chaque valeur de x0.

3.2.1.2) Gradient à pas variable

Résultat pour `x0=[0.2;0.02]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 360

Résultat pour `x0=[0.2;0.03]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 362

Résultat pour `x0=[-0.2;0.01]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 327

Résultat pour `x0=[0.5;0.3]`
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[1.52118e+30 , 5.0706e+29], la valeur correspondante de f est -3.911109e+90, et le nombre d'iteration est 17

On remarque donc que le point de départ x0 n'a pas vraiment d'influence ni sur x ni sur le nombre d'itérations pour les trois premières valeurs de x0. Il peut permettre de trouver l' « emplacement exact » d'un minimum local. On trouve une valeur de f sensiblement identique pour chaque valeur de x0.

3.2.1.3) Pas fixe – Pas variable

On remarque que choisir entre le gradient à pas fixe et le gradient à pas variable à x0 fixé, a une influence sur le nombre d'itérations. En effet, il faut noter qu'il faut compter 30 itérations de plus pour le gradient à pas variable. Cependant, quel que soit le type de pas choisi, le minimum et la valeur correspondante de f sont les même.

3.2.2) Influence du type de test d'arrêt et de la valeur du paramètre epsilon

On a d'ores et déjà vu que x0 avait une influence sur le nombre d'itérations. Il faudra donc choisir un Nmax grand si l'on souhaite obtenir une convergence, sinon :

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-8
Nombre maximum d'iterations atteint %gradient à pas fixe **Nombre maximum d'iterations atteint** %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-5
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.209522 , -0.137997], la valeur correspondante de f est 5.708728e-02, et le nombre d'iteration est 39 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.209344 , -0.137096], la valeur correspondante de f est 5.693408e-02, et le nombre d'iteration est 69** %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-3
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.00403048 , 0.0725093], la valeur correspondante de f est 3.750084e-05, et le nombre d'iteration est 8 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.00403048 , 0.0725093], la valeur correspondante de f est 3.750084e-05, et le nombre d'iteration est 8** %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=200 pour epsilon=10^-2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.17704 , 0.0308], la valeur correspondante de f est 2.562622e-02, et le nombre d'iteration est 1 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.17704 , 0.0308], la valeur correspondante de f est 2.562622e-02, et le nombre d'iteration est 1** %gradient à pas variable

Résultat pour Nmax=500 pour epsilon=10^-8
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 330 %gradient à pas fixe **Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 360** %gradient à pas variable

3.2.2.1) Gradient à pas fixe – pas variable

A Nmax fixé, on remarque qu'epsilon a une légère influence sur le nombre d'itérations. Le résultat final et le minimum, quant à eux, sont identiques. Choisir un epsilon très petit aura une influence sur le fait de trouver ou non une convergence. Ainsi, on augmentera Nmax lorsque epsilon sera plus « précis ».

3.2.3) Influence du paramètre alpha

Pas=0.1. Alpha n'agit que dans le gradient à pas variable. Etudions l'influence d'alpha sur le résultat final.

Résultat pour alpha=2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 360

Résultat pour alpha=3
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 391

Résultat pour alpha=5
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 452

Résultat pour alpha=100
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180192 , -0.249996], la valeur correspondante de f est 4.958124e-02, et le nombre d'iteration est 625

Alpha influence le nombre d'itérations lors du calcul du gradient en mode numérique. On peut remarquer que le minimum local et la valeur associée sont identiques pour chaque valeur d'alpha.

3.2.4) Influence du pas

3.2.4.1) Gradient à pas fixe

Résultat pour pas=0.1
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 330

Résultat pour pas=0.2
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.18019 , -0.249999], la valeur correspondante de f est 4.958082e-02, et le nombre d'iteration est 172

Résultat pour pas=1

Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.18019 , -0.249999], la valeur correspondante de f est 4.958081e-02, et le nombre d'iteration est 30

Résultat pour pas=0.05

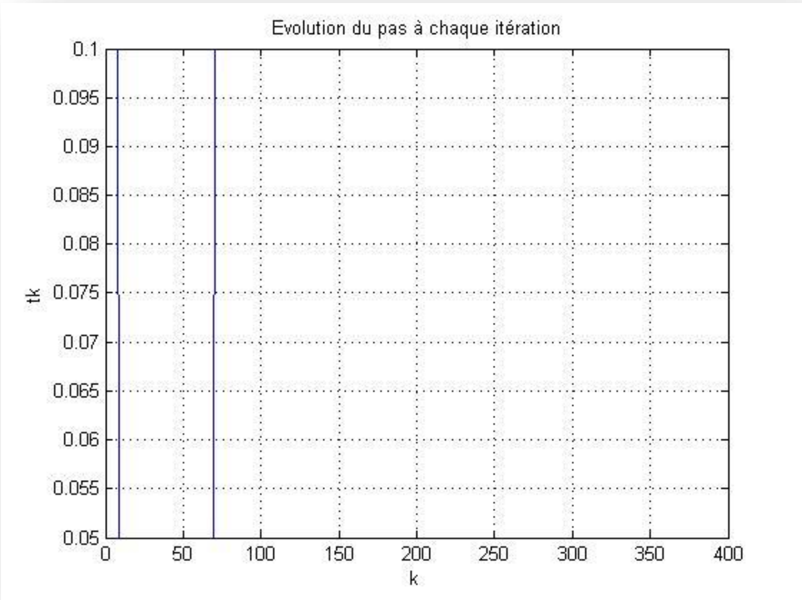
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[0.25 , -0.1875], la valeur correspondante de f est 6.249999e-01, et le nombre d'iteration est 228

On remarque que le pas a une grande influence sur le nombre d'itérations. Les minima locaux et les valeurs associées sont sensiblement identiques.

3.2.4.2) Gradient à pas variable

Résultat pour pas=0.1

Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180191 , -0.249998], la valeur correspondante de f est 4.958096e-02, et le nombre d'iteration est 360

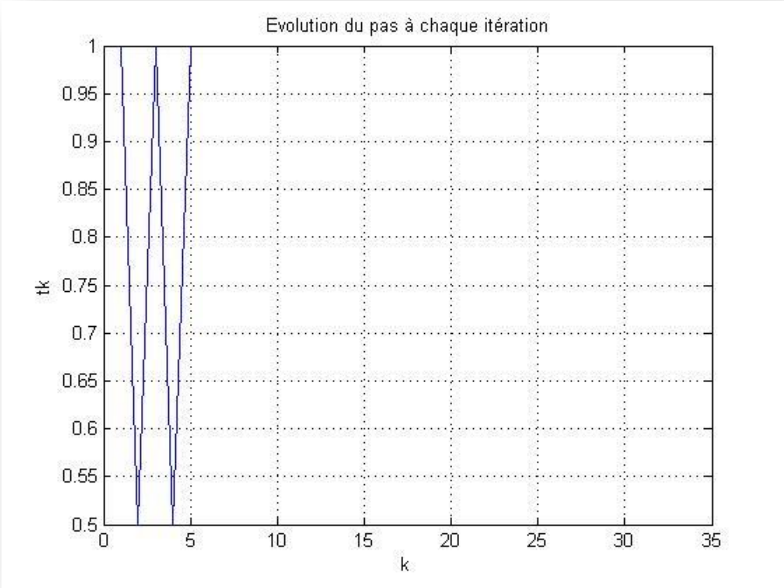


Résultat pour pas=0.2

Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.18019 , -0.249999], la valeur correspondante de f est 4.958082e-02, et le nombre d'iteration est 187

Résultat pour pas=1

Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.18019 , -0.25], la valeur correspondante de f est 4.958071e-02, et le nombre d'iteration est 35



Résultat pour pas=0.05
Convergence - le minimum est obtenu pour x=[-0.180192 , -0.249996], la valeur correspondante de f est 4.958124e-02, et le nombre d'iteration est 688

Le pas a une influence sur le nombre d'itération. Les minima locaux et les valeurs associées sont sensiblement identiques.

3.2.4.3) Pas fixe – pas variable

Le résultat final et le minimum local changent un peu mais c'est surtout sur le nombre d'itérations que le pas a une influence

Conclusion

Ce mini-projet a permis de trouver une méthode d'optimisation en programmant une méthode de descente sous Matlab. Ensuite, on a analysé les performances de l'algorithme sur des exemples de fonctions de R^2 dans R. Les problèmes qui peuvent se poser dans le « réglage » des différents paramètres ont été étudiés, nous avons ainsi pu analyser les influences des différents paramètres.